**К СВЧ КОЛЕБАНИЯМ**

1. **Описание модели**

Рассматривается следующая модель плазмы. Электронная компонента описывается кинетическим уравнением Власова.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

Ионы для простоты изложения предполагаются неподвижными. Соответственно, их концентрация -- постоянна. Электрическое поле состоит из внешней постоянной и однородной компоненты и собственного поля системы . Последнее определяется из уравнения Пуассона

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

где . Собственным магнитным полем системы пренебрегается. Внешнее магнитное поле (как внешнее электрическое) предполагается постоянным и однородным. В движущейся с дрейфовой скоростью системе отсчета внешняя составляющая электрического поля равна нулю. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать .

Дальнейшее рассмотрение касается решений системы (1)–(2), которые являются малыми возмущениями некоторого равновесного состояния (решения) :

Фактически будут интересовать плоские электростатические, т.е. , волны, распространяющиеся перпендикулярно магнитному полю. Равновесную функцию распределения будем предполагать изотропной по и однородной в направлении .

Оси координат выберем так, чтобы магнитное поле было направлено вдоль оси , а внешнее электрическое вдоль оси . Поскольку рассматриваются плоские волны (т.e. ), в вычислениях ниже координата опускается, а функция считается проинтегрированной по .

1. **Вывод общего дисперсионного уравнения (произвольная )**

В работе \*\* для рассматриваемой здесь ситуации было приведено дисперсионное уравнение. Однако вывода этого уравнения в указанной работе нет. Поэтому ниже, в качестве проверки представлен подробный вывод требуемого уравнения.

Линеаризуем кинетическое уравнение относительно равновесного решения .

Подставляя разложение в уравнение и пренебрегая членами выше первого порядка малости (в данном случае), находим

Методом интегрирования по траекториям в фазовом пространстве получаем, что

где второе равенство справедливо в силу изотропности . В рассматриваемой ситуации траектории (решения системы: и ) в силу условия B, являются окружностями

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

по которым частицы «бегают» с постоянной по модулю скоростью

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

Параметры и определяются из начальных условий: и . Таким образом, после замены имеем

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

Здесь где . Подставляя в систему - выражения для и в виде плоских волн:

,

получим

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |
|  |

Здесь для существования интеграла из первого равенства достаточно потребовать, чтобы Если через обозначить комплексное число , то выражение в скобках в этом интеграле можно записать как . Следовательно,

Далее, разложив функцию в ряд Фурье и поменяв (в последнем равенстве) порядки суммирования и интегрирования местами получим, что

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |

где – коэффициенты Фурье разложения равны

Здесь -- модифицированная функция Бесселя целого индекса . Таким образом, с четом равенства находим

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |

Используя рекуррентные свойства функций Бесселя, окончательно получаем, что

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

Теперь, для того, чтобы вывести дисперсионное соотношение, осталось подставить выражение (**5**)в правую часть уравнения Пуассона из системы :

|  |
| --- |
|  |
|  |

Учитывая следующие свойства Бесселевых функций:

находим

|  |
| --- |
|  |
|  |

Стало быть, дисперсионное уравнение имеет вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8) |

Полученное выражение справедливо при или (что тоже) в с системе отсчета связанной с дрейфовой скоростью. Для того, чтобы теперь перейти к неподвижной системе отсчета, нужно в правой части вместо везде подставить выражение , где – величина скорости дрейфа, параллельно оси . Предполагается, что поле направлено вдоль оси . Таким образом, окончательно имеем:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

1. **Дисперсионное уравнение в случае Максвеловского распределения**

В случае Максвеловского равновесного распределения

известно, что дисперсионное уравнение имеет (см. например heron,laval) вид

где – радиус Дебая, –плазменная частота, и . Данное уравнение справедливо для системы отсчета связанной с дрейфовой скоростью. Переход к неподвижной системе отсчета осуществляется аналогично переходу от к . Покажем теперь, что это уравнение вытекает из . Для этого воспользуемся, так называемым, равенством Вебера.

Теорема (Равенство Вебереа). При любом вещественном для Бесселевых функций целого порядка справедливо следующее равенство

Отметим, что равенство Вебера справедливо и в более общей формулировке (см. например \*\*\*), однако в рассматриваемом случае достаточно указанной. Приведем для справки доказательство равенства Вебера. Из интегрального представления функции Бесселя вытекает, что

Подставляя данное разложение в интеграл из левой части искомого равенства и меняя порядки суммирования и интегрирования местами, получим

|  |
| --- |
|  |
|  |

С другой стороны,

|  |
| --- |
|  |
|  |

Сравнивая полученные выражения друг с другом, заключаем справедливость искомого равенства.

Для аксвелловского распределения :

и, следовательно,

В заключение доказательства осталось только заметить, что

1. **Работа электрического поля над электроном**

Интересует величина

представляющая собой среднюю за единицу времени работу, совершаемую электроном против электрического поля волны. Здесь треугольными скобками как раз обозначено осреднение по достаточно большому промежутку времени :

В рассматриваемой ситуации и , где . Комплексная амплитуда дается выражением (**5**). Отметим, что изначально выражение (**5**) было получено в предположении Однако последнее не является ограничением, поскольку аналитическое продолжение по в нижнюю полуплоскость также задается (**5**).

Ввиду того, что – равновесная имеем

и, следовательно,

Предположим теперь, что и осциллируют быстрей, чем затухают, т.е. . Тогда

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |

Поскольку при усреднении по периоду осциллирующие величины дают вклад порядка , то

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

Вычислим компоненты вектора . Согласно (**5**) имеем

|  |
| --- |
|  |
|  |

Поскольку , то

|  |
| --- |
|  |
|  |

Таким образом,

|  |
| --- |
|  |
|  |

Действуя аналогично, получаем, что

|  |
| --- |
|  |
|  |

Подставляя теперь компоненты вектора в правую часть , находим

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |

и

Таким образом, учитывая равенство

получаем

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11) |

1. **Формулировка уравнений отклика функций распределения на поле**

Функция распределения представляется в виде суммы плавно меняющейся и быстро осциллирующей .

Первый вариант

Второй вариант

Во втором варианте функция не зависит от угла .

1. **Вывод (эвристический) уравнений отклика**

Представляем функцию распределения в виде суммы плавно меняющейся и быстро осциллирующей функции: . Усредняя исходное уравнение по *осцилляциям*, получаем

|  |  |
| --- | --- |
|  | (12) |

Здесь мы учли, что и , а также воспользовались тем, что

и .

Осциллирующий член берется из линейной теории:

Таким образом, первый вариант уравнения отклика получен.

Усредним теперь обе части уравнения по углу. Обозначив , имеем

и

|  |
| --- |
|  |
|  |

где

|  |
| --- |
|  |
|  |

Последнее равенство до конца не понятно (строгих обоснований в литературе не нашел). Учитывая данные равенства, получаем требуемое уравнение на .

1. **Запись уравнения отклика через коэффициент диффузии**

Рассмотрим выражение

В случае плоской монохроматической волны , ввиду равенства , для амплитуды выражения справедливо представление . Далее, аналогично получаем

|  |
| --- |
|  |
|  |

где , , а

По первой теореме о среднем

и, следовательно,

Предполагая , где , для осциллирующей добавки получаем выражение аналогичное (**7**)

Отсюда имеем

Откуда, интегрируя по траектории, имеем

Здесь и , где и траектория в фазовом пространстве С учетом данного выражения поток электронов вдоль электрического поля равен

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13) |

Отметим, что в данной формуле и

* 1. Вычисление потока

В формулу **(10)** поставим выражение для , т.е. формулу **(3)** с вместо . Выразим декартовы компоненты градиента через его компоненты в полярных координатах

Здесь . Отсюда

где, берется в точке траектории. Для плоской электростатической монохроматической волны

интегрант в правой части предыдущего равенства после осреднения по времени примет вид

|  |  |
| --- | --- |
|  | (14) |

Введем обозначение . Частные производные вычисляются исходя из представления (7):

|  |
| --- |
|  |
|  |

и

Используя данные выражения, вычислим вклад в поток от каждого слагаемого выражения . Для первого слагаемого

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |

где

Заметим, что в правой части предыдущего равенства от зависят только коэффициенты . Поэтому при осреднения по углу в выражении **(12)** возникнут интегралы

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |

Таким образом,

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |

Мнимая часть данного выражения, проинтегрированная по , является вкладом в поток от первого слагаемого выражения (13) с точностью до множителя .

Вычислим теперь второго слагаемого выражения (13). Имеем

где

При осреднении по углу в сумме выше возникнут интегралы

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |

Таким образом,

Мнимая часть данного выражения, проинтегрированная по , является вкладом в поток от второго слагаемого выражения (13) с точностью до множителя .

В целях упрощения выкладок разберем два случая: и соответствующие распространению волны либо вдоль оси , либо вдоль оси .

Пусть , т.е. . Тогда

|  |
| --- |
|  |
|  |

Следовательно,

и

|  |
| --- |
|  |

* 1. Соответствие с дрейфовым приближением

В случае гладких и медленных полей часто используют так называемое дрейфовое приближение. Формула для потока в этом случае выглядит следующим образом

Покажем, что из формула для потока в квазилинейном приближении переходит в соответствующую формулу дрейфого приближения. Если поле слабо меняется на расстояниях порядка ларморовского радиуса и на временах порядка циклотронного периода тогда в формуле для величину можно вынести за знак интеграла по . Имеем

Заметим, что

Следовательно,

Первое слагаемое в правой части данного равенства в точности совпадает с формулой для дрейфового приближение. Для вычисления второго слагаемого учтем, что это линейная поправка:

Здесь мы воспользовались гладкостью поля изотропностью равновесного распределения . Через обозначен оператор поворота на Подставляя последнее выражение во второе слагаемое получаем

В крайнем интеграле повернем систему координат так, что бы ось Ox смотрела в сторону вектора (мы считаем поле фактически однородным) и перейдем к полярным координатам

Таким образом, , в случае гладкого медленного электрического поля и изотропного невозмущенного распределения.